Übungsstunde 8:

Themen heute:

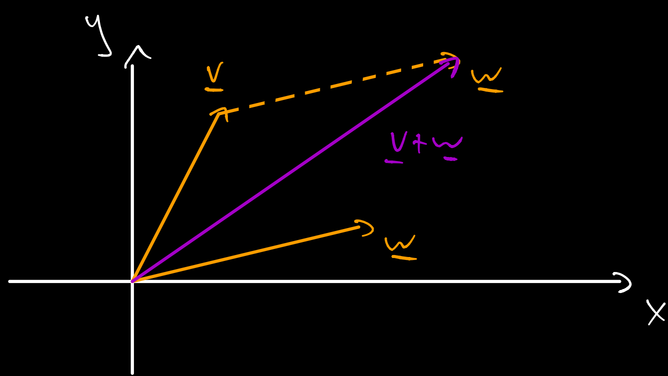
- Normierte Vektorräume
- Skalarprodukte in lin. Räumen
- Orthogonalprojektion
- Orthonormalbasis (ONB)
- Gram-Schmidt

Normierte Vektorräume: $V = \{V, \|\cdot\|\}$ $\quad \|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

(i) $\forall v \in V: \quad \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (semi-positive Definitheit)

(ii) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Linearität ggü. Skalarmultiplikation)

(iii) $\forall v, w \in V: \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)



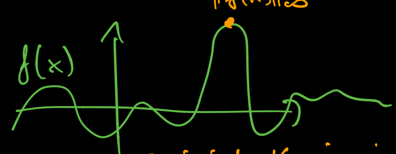
→ Norm ist keine lineare Abbildung!

$$f(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

$$\|\alpha \underline{x} + \underline{y}\| \leq |\alpha| \cdot \|x\| + \|y\| \ ↯$$

Bsp.: $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto \|\underline{v}\|_2 = \sqrt[2]{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

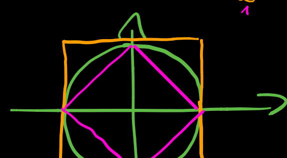
$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} \mapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$



$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} \mapsto \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \ldots + |v_n|^p}$

Beispiel Kreis in versch. Normen:

$K = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\|_{2, \infty, 1} = 1 \}$



$\|\underline{x}\|_1 = x_1 + x_2 + x_3 \ldots$

$$\|\cdot\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\cdot\|_p = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p} = \underline{\underline{\max_{1\le i\le n} \{|v_i|\}}}$$

Alle Normen sind äquivalent:

$$c \cdot \|\cdot\|_a \le \|\cdot\|_b \le C \cdot \|\cdot\|_a$$

Skalarprodukten in linearen Räumen: $x, y, z \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\ (\underline{a}, \underline{b}) \mapsto \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

(i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \langle x, \lambda y + \lambda z\rangle = \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda z\rangle$
$= \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$

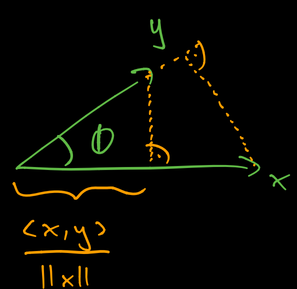
$\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$ (Linear in beiden Gliedern)

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (Für komplexe Funktionen muss der Output kompl. konj. werden ($\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$))

(iii) $\langle x, x\rangle \ge 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (semi-positiv Definit)

Induzierte Norm:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$$



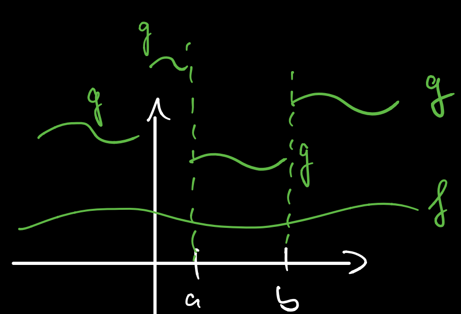
Bsp.: $\langle x, y\rangle_2 = x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\phi$

$\langle x, x\rangle = x^T x = \|x\|_2^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \|x\|_2$

$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt[2]{x_1^2 + x_2^2} = \|\underline{x}\|_2$

Im $C[a,b]$:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Orthogonalität: x ist orthogonal auf y, falls

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} \geq 0 \quad \forall x$

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y} = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = (*)$$

(i) $\langle \underline{x}, \underline{y} + \lambda \underline{z}\rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} (\underline{y} + \lambda \underline{z}) = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y} + \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \lambda \underline{z}$

$$= \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y} + \lambda \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z} = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + \lambda \langle \underline{x}, \underline{z}\rangle_A \quad \checkmark$$

(ii) $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_A = \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle_A$:

1. Mögl.: $[y_1 \ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (*)$ (Explizite Berechnung ist meist zu aufwand.)

2. Mögl.: $\underline{y}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{y})^T \underset{A \text{ symm.}}{=} (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y})^T = (\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_A)^T = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_A \quad \checkmark$

(iii) $\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle_A \geq 0$:

1. Mögl.: $(*) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0 \quad \forall \underline{x}$

$$\geq x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$$

2. Mögl.: $\underline{\underline{A}}$ semi-positiv definit (s.p.d.) $\Leftrightarrow$ EW von $A \geq 0$

$$\Rightarrow \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} \geq 0 \quad \forall x$$

Orthogonalprojektion: von $\underline{x}$ auf $\underline{y}$

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \underline{y}$$

Länge der orth. Proj. von $\underline{x}$ auf $\underline{y}$, gestreckt um den Faktor $\|y\|$

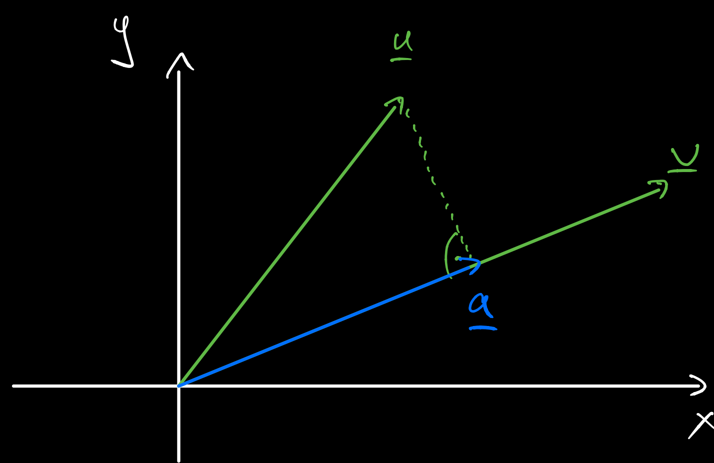
$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \underline{y}$$

$$\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle = \|\cdot\|^2 = \|y\| \cdot \|y\|$$

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$$

$$= \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|y\|} \cdot \frac{\underline{y}}{\|y\|}$$

Länge von $\underline{x}$ orth. auf $\underline{y}$ projeziert; $\frac{\underline{y}}{\|y\|} = \underline{e}_y$



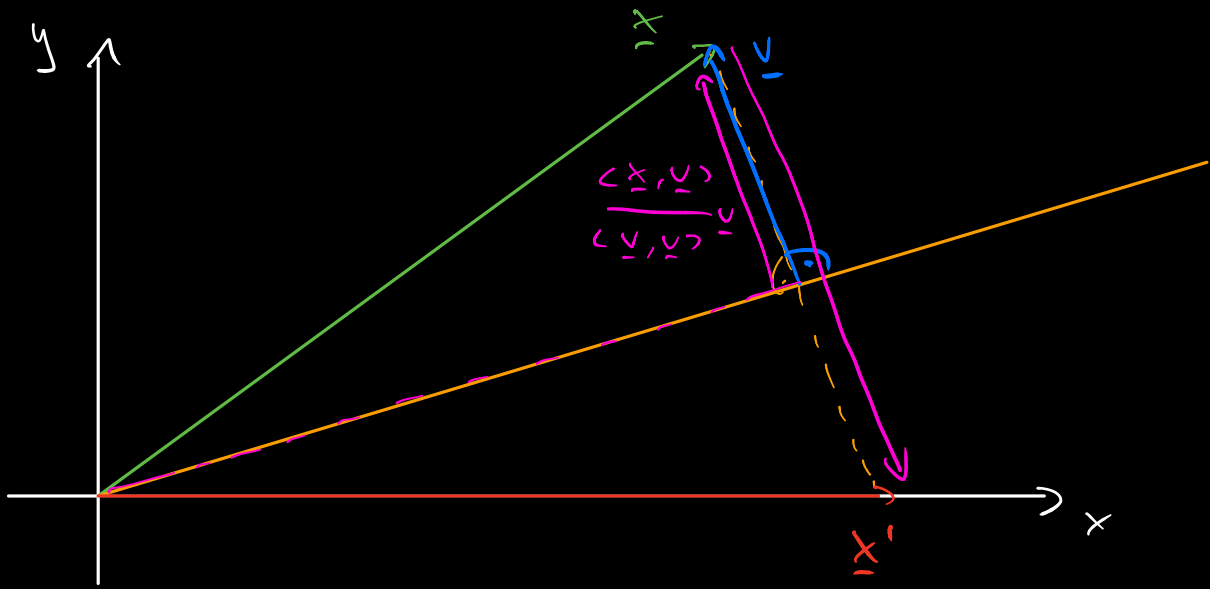
$$a = \langle \underline{u}, \underline{e}_v \rangle$$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \|v\| \cdot \underline{e}_v \rangle$$
$$= \|v\| \cdot \langle \underline{u}, \underline{e}_v \rangle$$
$$= \|v\| \cdot a$$

Revisit Householdermatrix:

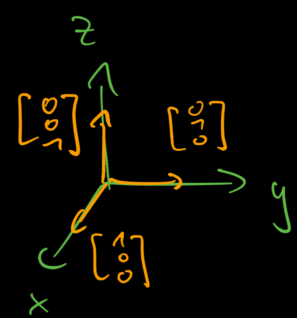
$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2 \frac{\underline{v}\,\underline{v}^T}{\underline{v}^T \underline{v}} = \underline{\underline{I}} - 2 \underline{u}\,\underline{u}^T, \quad \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

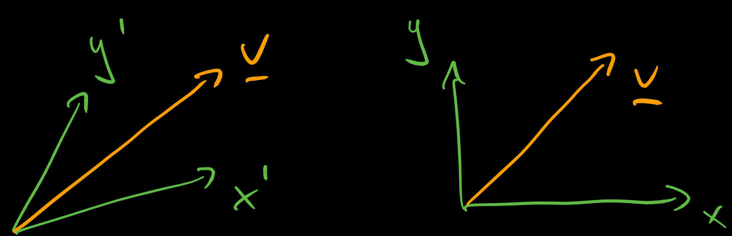
$$\underline{\underline{H}}\,\underline{x} = \underline{\underline{I}}\,\underline{x} - 2 \frac{\underline{v}\,\underline{v}^T x}{\underline{v}^T \underline{v}} = \underline{\underline{I}}\,\underline{x} - 2 \underbrace{\frac{\langle \underline{x}, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \underline{v}}_{\text{Orth. proj. von } \underline{x} \text{ auf } \underline{v}}$$



Orthonormalbasis: (ONB)

Bsp.: $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ im $\mathbb{R}^3$





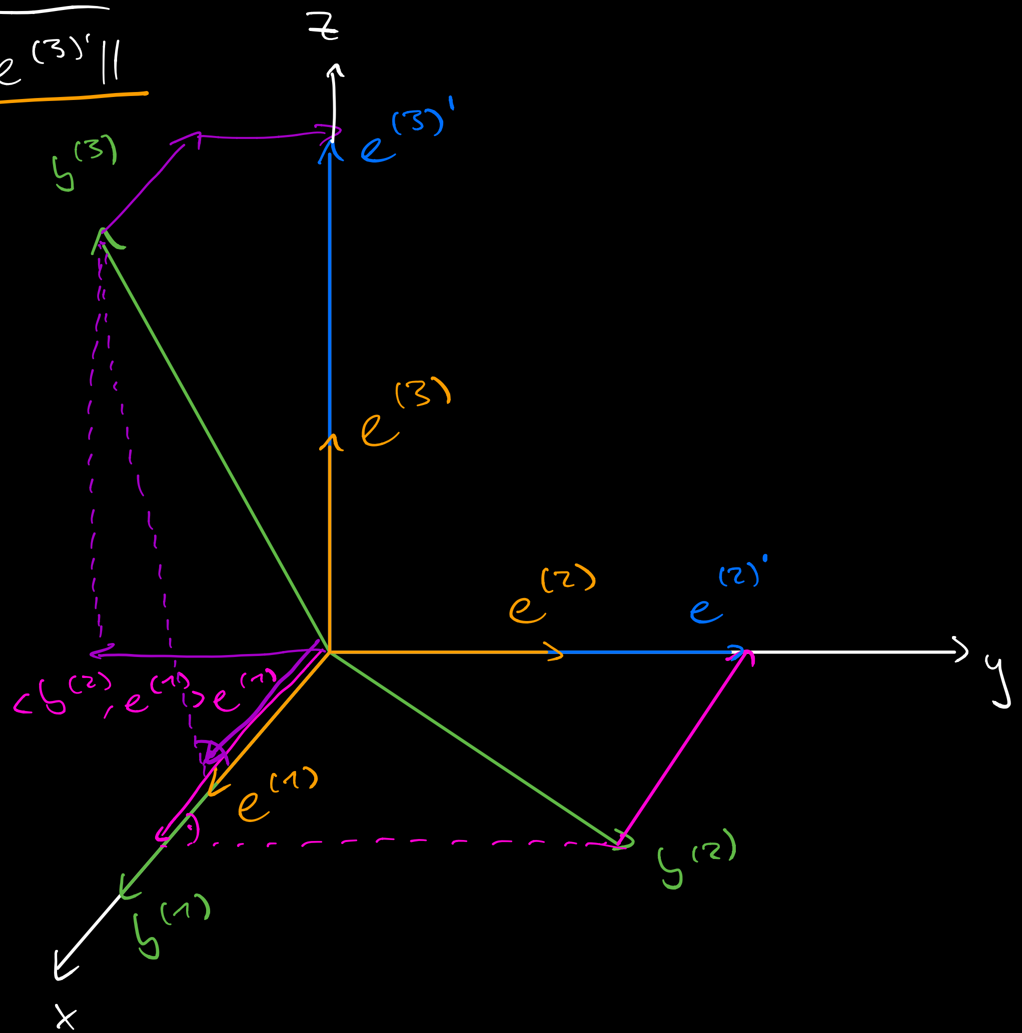
Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren: $B = \{b^{(1)}, \dots b^{(n)}\}$

(i) $$e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$$

(ii) $$e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} \quad \& \quad e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$$

(iii) $$e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$$

$$\& \quad e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$$



Bsp.:

Euklidischer Raum $\qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(i) $e^{(1)} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = b^{(1)}$

(ii) $e^{(2)'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}$

$e^{(2)} = \dfrac{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$